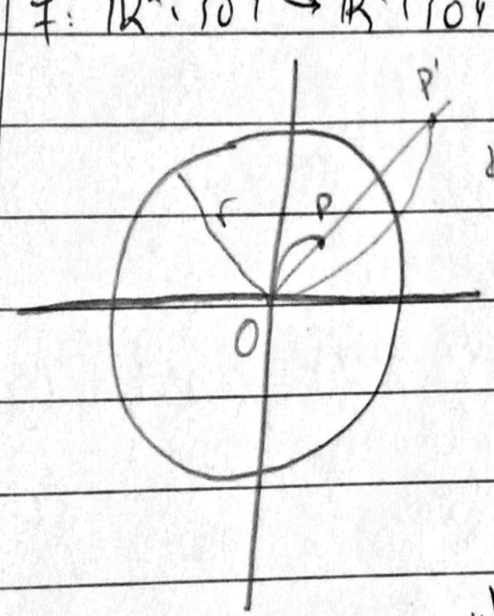
• Χρήσιμα Στοιχεία από Αναλυτική Γεωμ.

Στο $\mathbb{R}^2$ υπάρχουν οι γνωστές ευθείες κ' κύκλοι

Ορισμός (Συνάρτηση αντιστροφή) ως προς κύκλο $K(O,r)$ $O(0,0)$, $r>0$

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ η αντιστροφή ως προς τον κύκλο $K(O,r)$



$f(P) = P'$ όπου P' αντίστροφο του P ως προς K

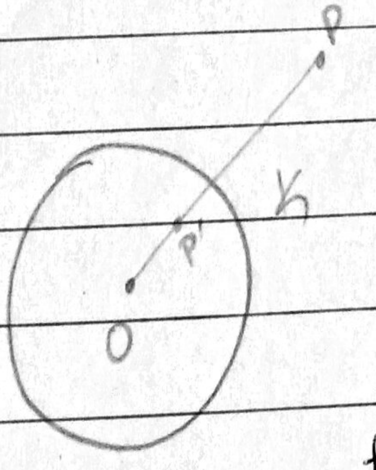
P' το μοναδικό σημείο του $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ώστε:

$|OP||OP'| = r^2$ $(P' \neq 0,\ P' \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

i) $P \in K$, $P' = P$

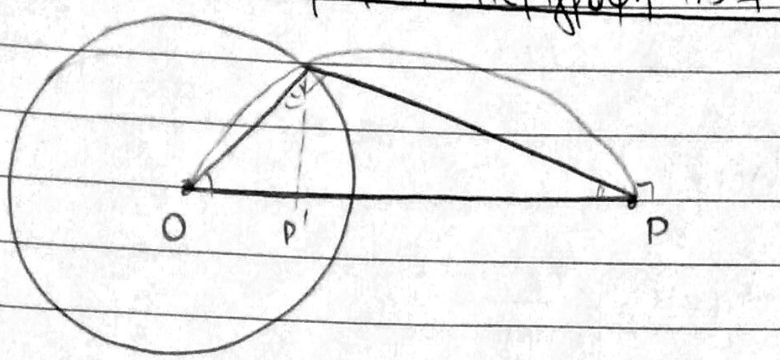
ii) P εσωτερικό του K, $P \neq 0 \to P'$ εξωτερικό

iii) P εξωτερικό $\to P'$ εσωτερικό του K



$$\left.\begin{array}{l} P \text{ εξωτ} \\ f(P) = P' \\ f(P') = P \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (f \circ f)(P) = P, \ \forall P \neq 0 \\ f \circ f = I_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \Rightarrow f^{-1} = f \end{array}$$

Γεωμετρική Περιγραφή της f



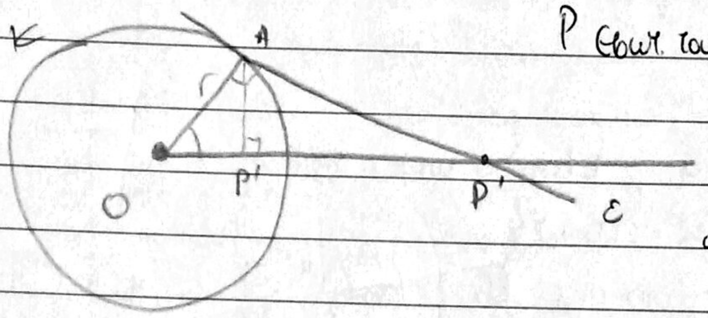
i) P εξωτ. του K $\quad f(P) = P' \leftarrow$ εσωτερικό

Αρκεί νδο $|OP||OP'| = r^2$

Συγκρίνουμε ως προς την ομοιότητα τα $O\hat{A}P \sim O\hat{A}P'$, $\hat{O}$ κοινή ορθογ.

Άρα, $\dfrac{r}{|OP'|} = \dfrac{|OP|}{r}$

ii) P εσωτερικό του K



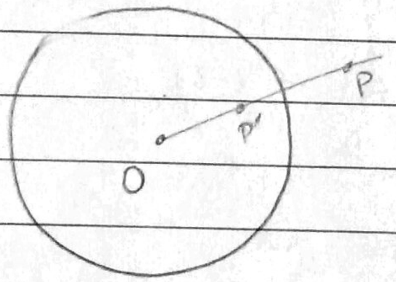
P εσωτ. του K $\quad P \neq O$

$P' \in \ell \cap \varepsilon$

$|OP||OP'| = r^2 \Rightarrow P' = f(P)$

Συγκρίνοντας $O\hat{A}P \sim O\hat{A}P'$

Τύπος (αναλυτικός) της αντιστροφής ως προς $K(O,r)$



$P(x,y) \neq O(0,0)$

$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ όπου $\alpha \neq 0$

$P'(x',y') \qquad (x',y') \sim (x,y)$

$f(P) = f(x,y) = (x',y') =$

$= (x'(x,y),\ y'(x,y)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$|OP||OP'| = r^2$ (1)

$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OP'}$, $\exists \lambda > 0 \Rightarrow (x,y) = \lambda(x',y')$ (2)

(2) $\Rightarrow x = \lambda x'$, $y = \lambda y' \Rightarrow y' = \dfrac{y}{\lambda}$, $\lambda = \dfrac{x}{x'} \Rightarrow y' = \dfrac{x'}{x} y$

$x \neq 0$, $\lambda > 0$

$x' \neq 0$

(1) $\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = r^2$

$(x^2+y^2)((x')^2+(y')^2) = r^4$

Άρα, $(x^2+y^2)\left((x')^2 + \left(\frac{x'}{x}\right)^2 y^2\right) = r^4$

$\left(\frac{x'}{x}\right)^2 (x^2+y^2)(x^2+y^2) = r^4$

$\left(\frac{x'}{x}\right)^2 = \frac{r^4}{(x^2+y^2)} \Rightarrow (x')^2 = \frac{r^4 x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Επειδή x', x ομόσημα $\Rightarrow x' = \frac{r^2 x}{x^2+y^2}$

$y' = \frac{x'}{x} y = \frac{r^2 x}{x^2+y^2} \frac{1}{x} y = \frac{r^2 y}{x^2+y^2}$

$(x,y) \neq (0,0)$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$f(x,y) = \left(\frac{r^2 x}{x^2+y^2}, \frac{r^2 y}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

• $O(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\quad r>0$ $\quad K(O,r)$: κύκλος αναστροφής

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}$

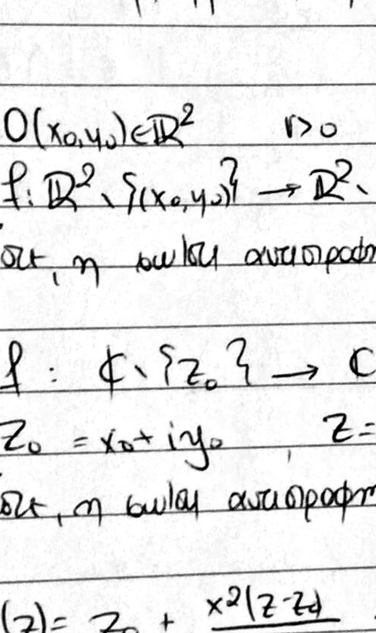
Τότε, η κυκλική αναστροφή είναι $f(x,y) = \left(x_0 + \frac{r^2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, y_0 + \frac{r^2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$

• $f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$z_0 = x_0 + iy_0$, $\quad z = x + yi$

Τότε, η κυκλική αναστροφή είναι $f(z) = z_0 + \frac{x^2(z-z_0)}{(z-z_0)^2}$

$f(z) = z_0 + \frac{x^2(z-z_0)}{(z-z_0)(\overline{z-z_0})} = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{z_0}}$



$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

1) $\Gamma = 0$

2) $\Gamma \neq 0$ $\quad (\varepsilon)$ $Ax + By + \Gamma = 0$

$|A| + |B| \neq 0$

Ψάχνουμε $f((\varepsilon)) = \{\underbrace{f(x,y)}_{=(x',y')} : Ax + By + \Gamma = 0\}$

$(x',y') = f(x,y) \Rightarrow (x,y) = f^{-1}(x',y') = f(x',y')$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{r^2 x}{x^2+y^2} \Rightarrow x = x(x',y') \\ y' = \dfrac{r^2 y}{x^2+y^2} \Rightarrow y = y(x',y') \end{cases}$$

Το (x',y') είναι το αντίστροφο του (x,y) γιατί βγήκαν οι παραπάνω σχέσεις τότε το αντίστροφο του (x,y) είναι το (x',y')

$$\begin{cases} x = \dfrac{r^2 x'}{(x')^2+(y')^2} \\ y = \dfrac{r^2 y'}{(x')^2+(y')^2} \end{cases}$$

Εφόσον $f(\varepsilon) = ;$ αν $(x,y) \in (\varepsilon) \to Ax+By+\Gamma=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A\frac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2} + B\frac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2} + \Gamma = 0$$

(*) $Ax+By+\Gamma=0$ $\quad (x',y') = f(x,y)$ $\quad \Gamma=0$ Τότε $Ax'+By'=0$

Άρα $\Rightarrow \Gamma((x')^2+(y')^2) + r^2(Ax'+By') = \dfrac{r^4A^2+r^4B^2}{4\Gamma}$

ΔΟ αν $(x',y') \in f(\varepsilon)$? $\Rightarrow (x',y')$ ικαν.

$f((\varepsilon)) \subseteq \{(x',y') : \text{ικανοποιεί } (3)\} \setminus \{(0,0)\}$

(3) $\Leftrightarrow (x')^2+(y')^2 + \dfrac{r^2Ax'}{\Gamma} + \dfrac{r^2B}{\Gamma}y' = \dfrac{x^4A^2+r^4B^2}{4\Gamma^2}$

$$(x')^2 + 2x'\left[\frac{1}{2}\frac{r^2A}{\Gamma}\right] + \left(\frac{r^2A}{2\Gamma}\right)^2 + (y')^2 + 2y'\frac{1}{2}\frac{r^2B}{\Gamma} + \left[\frac{r^2B}{2\Gamma}\right]^2 = R^2$$

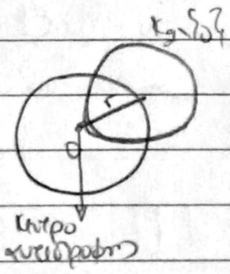
$$R^2 = \frac{x^4A^2+r^4B^2}{4\Gamma^2}$$

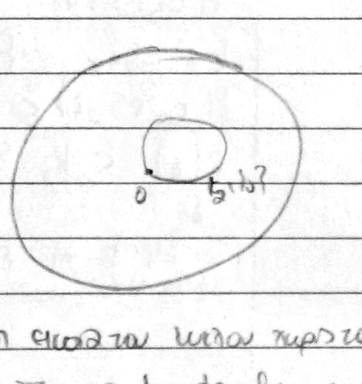
$\left(x' + \frac{1}{2}\frac{r^2A}{\Gamma}\right)^2 + \left(y' + \frac{r^2B}{2\Gamma}\right)^2 = R^2$ είναι κύκλος $K_2(O',R)$, $R = \dfrac{r^2\sqrt{A^2+B^2}}{2|\Gamma|} > 0$

$O'\left(-\frac{1}{2}\frac{r^2A}{\Gamma}, -\frac{1}{2}\frac{r^2B}{\Gamma}\right)$

$f(\varepsilon) \subseteq K_2 \setminus \{0\}$ (4)

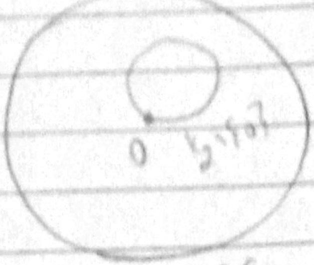
(4) $\Rightarrow f^{-1}(f(\varepsilon)) \subseteq f(K_2 \setminus \{0\})$





η εικόνα του κύκλου χωρίς το
μηδέν είναι μη φραγμένο σύνολο
άρα κύκλος δεν γίνεται να είναι
άρα παίρνουμε ευθεία!

$\kappa(R,1)$



Έστω κ_3 κύκλος

$\kappa_3: x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

$(r\neq 0, \Gamma\neq 0)$

$f(\kappa_3)$

Στόχος: $f(\kappa_3\setminus\{0\}) \subseteq$ ευθεία

$\kappa_3: x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 \ (5) \Rightarrow$

$R>0$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2 = -\Gamma+\frac{A^2+B^2}{4} > 0$$

▸ Μορφή κύκλου: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

κύκλος $\Leftrightarrow A^2+B^2-4\Gamma>0$

$=0$ για σημείο

$f(\kappa_3)=\{f(x,y)=(x',y') : (x,y)\in\kappa_3\}$

Τότε $x=\dfrac{r^2x'}{(x')^2+(y')^2}$, $y=\dfrac{r^2y'}{(x')^2+(y')^2}$ } Αντικαθιστώ κ' θα έχω:

$$\frac{r^4(x')^2}{((x')^2+(y')^2)^2}+\frac{r^4(y')^2}{(\ )^2}+\frac{Ar^3x'}{(\ )}+\frac{Br^2y'}{(\ )}+\Gamma=0 \Leftrightarrow$$

$\Gamma=0 \Rightarrow f(\kappa_3\setminus\{0\}) \subseteq \varepsilon_1 \rightarrow$ δεν διέρχεται από το 0

$r^4+Ax'r^3+Br^2y'+\Gamma((x')^2+(y')^2)=0 \ : \kappa_4$ $\quad f(\kappa_3)\subseteq\kappa_4$

$f(\kappa_3)\subseteq\kappa_4$

κ_4 ευθεία $=\varepsilon_4$, όπου $0\in\kappa_3$

$f(\kappa_3\setminus\{0\}) \subseteq \varepsilon_4 \rightarrow$ που δεν διέρχ. από το 0.

$f(\varepsilon) \subseteq \kappa_1\setminus\{0\}$

$\downarrow$

(δεν διέρχ από το 0) $\Rightarrow \varepsilon \subseteq f(\kappa_1\setminus\{0\}) \subseteq \varepsilon_4 \quad \Rightarrow \varepsilon=\varepsilon_4$

$f(K_3) = \{ f(x,y) = (x',y') : (x,y) \in K_3 \}$

$\boxed{K_4: r^4 + Ar^2x' + Br^2y' + \Gamma[(x')^2+(y')^2] = 0}$

$K_3: x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$

$\Gamma < \frac{A^2+B^2}{4}$ ✓

$f(K_3) \subseteq K_4$ $\quad K_4$: κύκλος $\quad O \notin K_4$ ✓

$O \notin K_3 \to f(K_3) = ;$ $\quad O(0,0) \in K_4$; όχι

$O \in K_3 \Rightarrow K_4$ ευθεία

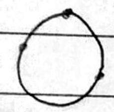
4) Αν K_3 κύκλος ο οποίος δεν διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής της f: $K(O,r)$ $\quad (O \notin K_3)$

$\Rightarrow f(K_3) \subseteq K_4 \quad (O \notin K_4)$

Πώς θα προκύψει η ισότητα; Εφαρμόζω την f, δηλ.

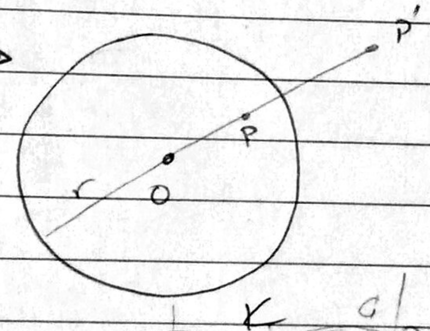
$\Rightarrow \underbrace{f(f(K_3))}_{K_3} \subseteq f(K_4) \subseteq K_5 \quad (O \notin K_5) \quad i = 3,4,5, \ O \notin K_i$

$\Rightarrow K_3 \subseteq f(K_4) \subseteq K_5 \to K_3 = K_5$ ✓

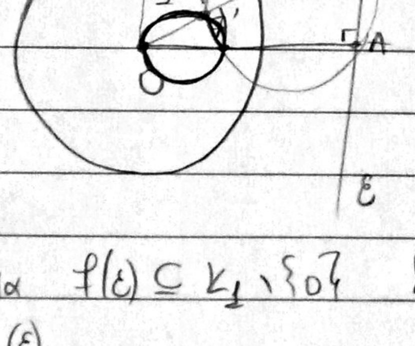


τρία σημεία της K_3 ορίζουν μοναδικό κύκλο, τον K_5

$\to K_3 = f(K_4) \Rightarrow f(K_3) = f(f(K_4)) = K_4$.



$|OP|\cdot|OP'| = r^2$, $P \neq O$



$O \notin \varepsilon$

$f(\varepsilon) = ;$

Έχουμε ότι $|OA|\cdot|OA'| = r^2$

Θεωρώ τον κύκλο K_1 με διάμετρο OA'

Θδο $f(\varepsilon) = K_1 \setminus \{O\}$

Πρώτα $f(\varepsilon) \subseteq K_1 \setminus \{O\}$ & $\varepsilon \supseteq f(K_1 \setminus \{O\})$

$P \in (\varepsilon)$

$P'' \in K_1$ $\quad f(P) = P'$: το αντίστροφο του P $\quad$ Στόχος $P' \in K_1$, άρα $P' = P'' = f(P)$

Ισχυρισμός: P'', P, A, A' ομοκυκλικά

$\exists C$ (κύκλος μοναδ.): $P, A', P'' \in C$ $\quad$ θδο $A \in C$

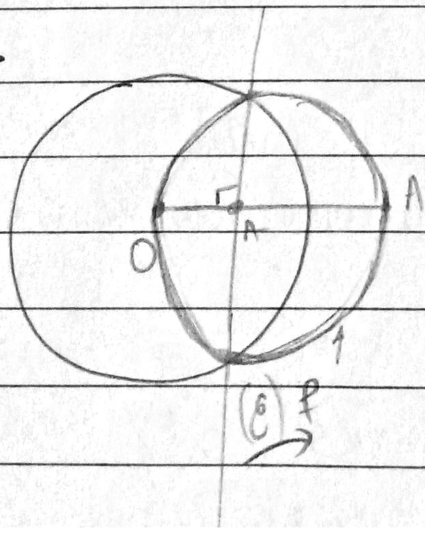
Στω έχουμε ότι: $|OA||OA'| = r^2$ $\Downarrow$ αρκεί $|OP||OP''| = r^2$

$$\underset{?}{P''} = f(P) = \underset{?}{P'}$$

όπου $\overset{\Delta}{OA'P''} \approx \overset{\Delta}{OAP}$ (εύκολα αποδ.)

και από ΘΑΛΗ: $\frac{OA'}{OP''} = \frac{|OP|}{|OA|} \Rightarrow |OP||OP''| = r^2$ άρα $P'' = P'$

iii)



[Η απόδειξη ακριβώς ίδια]